Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
7me série, Section des Sciences, t. V, nº 1.

RECHERCHES

SUR QUELQUES GÉNÉRALISATIONS D'UNE

IDENTITÉ INTÉGRALE D'ABEL

PAR

NIELS NIELSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. V. 1

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1907

Pris: 1 Kr. 20 Ø.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

	Kr.	Øre
I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1. **Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	»	65.
2. **Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3. **Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4. **Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	»
5. **Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	»
6. **Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	»	50.
7. **Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35.
8. **Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9. —— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10. —— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11. **Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885	1.	85.
II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1. **Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2. **Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3. **Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30.
4. **Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5. **Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	»	60
6. **Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884	4.	»
7. **Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	»	80.
8. **Traustedt, M. P. A.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9. **Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885	1.	»
10. —— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11. **Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»
III, med 6 Tavler, 1885—86	16.	»
1. **Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885	10.	»
2. **Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
3. **Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
4. **Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886	6.	75.
IV, med 25 Tavler. 1886—88	21.	50.
1. **Boas, J. E. V.** Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse. Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886	10.	50.
2. **Lehmann, A.** Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886	1.	50.
3. **Hannover, A.** Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887	1.	60.
4. **Lütken, Chr.** Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	60.
5. —— Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten *Himantolophus*. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	75.
6. —— Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*. Med 2 Tavler. Résumé en francais. 1887	4.	75.
7. **Koefoed, E.** Studier i Platosoforbindelser. 1888	1.	30.
8. **Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 3die Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888	6.	45.
V, med 11 Tavler og 1 Kort. 1889—91	15.	50.
1. **Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om de tre pelagiske Tandhval-Slægter *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus*. Med 1 Tavle og 1 Kort. Résumé en français. 1889	2.	75.
2. **Valentiner, H.** De endelige Transformations-Gruppers Theori. Résumé en français. 1889	5.	50.
3. **Hansen, H. J.** Cirolanidæ et familiæ nonnullæ propinquæ Musei Hauniensis. Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr. Med 10 Kobbertavler. Résumé en français. 1890	9.	50.
4. **Lorenz, L.** Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne. 1891	»	75.

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

RECHERCHES

SUR QUELQUES GÉNÉRALISATIONS D'UNE

IDENTITÉ INTÉGRALE D'ABEL

PAR

NIELS NIELSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. V. 1

KØBENHAVN

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1907

Introduction.

La démonstration *rigoureuse* que C. Neumann[1]) a donnée pour l'existence des séries de carrés des fonctions cylindriques est extrêmement élégante.

En effet, en appliquant sa formule intégrale

$$(J^n(x))^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2n}(2x\cos\varphi)\,d\varphi, \tag{α}$$

n étant un entier non négatif, l'illustre géomètre allemand a déduit de la formule

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2n+2s)\,\Gamma(2n+s)}{s!} \cdot J^{2n+2s}(x) \tag{β}$$

le développement correspondant de x^{2n} selon des carrés des fonctions cylindriques.

En essayant de généraliser cette méthode ingénieuse, j'ai vu son analogie avec celle que Schlömilch[2]) a appliquée dans la démonstration *non rigoureuse* de ses séries selon des fonctions cylindriques, méthode qui transforme, à l'aide d'une identité intégrale due à Abel, une série de Fourier en la série de fonctions cylindriques susdite.

Or, pour pouvoir généraliser la méthode de Neumann j'avais avant tout à généraliser la formule susdite d'Abel et cela d'une manière différente de celle de M. N. de Sonin[3]).

En effet, il est évident que la généralisation de la formule d'Abel, trouvée par l'éminent géomètre russe, ne permet pas de transformer la série (β) en une autre selon des produits de deux fonctions cylindriques.

Dans mes premières recherches sur les séries *neumanniennes* et *kapteyniennes*[4]) j'ai réussi à trouver une généralisation de la formule d'Abel qui m'a permis de transformer directement une série de fonctions cylindriques de cette forme

[1]) Leipziger Sitzungsberichte 1869, p. 221—256. Mathematische Annalen, t. 3, p. 581—610; 1871.

[2]) Zeitschrift für Math. und Phys., t. 2, p. 155—158; 1856.

[3]) Mathematische Annalen, t. 16, p. 48; 1880. Acta Mathematica, t. 4, p. 171—175; 1884.

[4]) Annales de l'Ecole Normale (3), t. 18, p. 39—75; 1901. Handbuch, p. 316—320; 1904.

$$f(\rho x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s(\rho) J^{2s}(\alpha_s x) \qquad (\gamma)$$

en une autre qui contient des produits de deux fonctions cylindriques, savoir

$$f(\rho x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s(\rho) J^{s+\nu}(\alpha_s x) J^{s-\nu}(\alpha_s x), \qquad (\delta)$$

ν étant un paramètre fini quelconque.

Cependant la formule (δ) ne possède pas la généralité désirable, parce que la somme des paramètres des deux fonctions cylindriques est un entier.

Dans le présent mémoire j'ai complètement résolu le problème indiqué dans toute sa généralité.

En effet, j'ai trouvé une généralisation de l'identité d'Abel qui nous permet de transformer une série de fonctions cylindriques quelconques en une autre qui procède selon des produits de deux fonctions cylindriques dont les paramètres ont une somme quelconque. De plus j'applique la formule de M. de Sonin pour obtenir une transformation intéressante d'une série *neumannienne* de fonctions ultrasphériques.

Dans le Chapitre III j'étudie une équation différentielle nouvelle, déduite de ma généralisation très étendue de la formule (α), et quelques intégrales définies nouvelles qui s'y rattachent.

Copenhague, le 17 septembre 1906.

Niels Nielsen.

CHAPITRE I.

Applications aux fonctions sphériques.

§ 1. Généralisations de l'identité d'Abel.

Supposons que le rayon de convergence r de la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{1}$$

soit plus grand que zéro, puis mettons pour abréger:

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\rho}\,d\varphi\,,\quad \Re(\rho) > -\frac{1}{2}; \tag{2}$$

l'intégrale *eulérienne* de première espèce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^a\,(\sin\varphi)^b\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)}, \tag{3}$$

où il faut admettre $\Re(a) > -1$, $\Re(b) > -1$, donnera immédiatement pour $F(x)$ cette série de puissances

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)a_s}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\rho+1\right)}\cdot x^s \tag{4}$$

qui a également son rayon de convergence égal à r.

Appliquons ensuite l'autre formule *eulérienne*

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \tag{5}$$

nous aurons par le même procédé:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x\sin\psi)\,(x\sin\psi)\,(tg\,\psi)^{2\rho}\,d\psi = \frac{\pi}{2\cos\rho\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s x^{s+1}}{s+1},$$

d'où, en vertu de (1) et (2), cette identité intégrale:

$$\frac{\pi}{2\cos\rho\pi}\cdot f(x) = D_x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi\sin\psi)\,(x\sin\psi)\,(tg\,\psi)^{2\rho}\,(\sin\varphi)^{2\rho}\,d\varphi\,d\psi\,, \tag{6}$$

où il faut admettre généralement $\frac{1}{2} > \Re(\rho) > -\frac{1}{2}$.

Cela posé, il est facile de voir que la formule de CAUCHY

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^a \cos(b\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\,\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}, \quad \Re(a) > -1, \tag{7}$$

nous conduira à une identité analogue à (6).

A cet effet, mettons pour abrèger:

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)(\cos\varphi)^\nu \cos(\rho\varphi)\, d\varphi, \quad \Re(\nu) > -1; \tag{8}$$

nous aurons tout d'abord, en vertu de (7), pour $G(x)$ la série de puissances

$$G(x) = \pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+s+1)\, a_s x^s}{2^{\nu+s+1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\rho+s}{2}+1\right)}, \tag{9}$$

qui a aussi son rayon de convergence égal à r.

Appliquons ensuite la formule (3), il résulte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x\sin 2\psi)(x\sin 2\psi)^{\nu+1}(\cot\psi)^\rho d\psi = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{\nu+s+1}}{\nu+s+1},$$

d'où finalement cette autre identité intégrale:

$$f(x) = \frac{2x^{-\nu}}{\pi} \cdot D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi\sin 2\psi)(\cos\varphi)^\nu\cos(\rho\varphi)(x\sin 2\psi)^{\nu+1}(\cot\psi)^\rho\, d\varphi\, d\psi, \tag{10}$$

où il faut supposer généralement $\Re(\nu) > -1$, $\Re(\nu-\rho) > -2$.

Or, il est très facile de généraliser beaucoup les deux formules (6) et (10) que nous venons de démontrer pour une fonction qui est supposée holomorphe aux environs de l'origine.

A cet effet, supposons que $f(x)$ soit développable en série comme suit:

$$f(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \ldots + a_n p_n(x) + \ldots, \tag{11}$$

où les fonctions $p_r(x)$ sont holomorphes aux environs de l'origine, puis supposons que la série (11) soit *uniformément* convergente dans un domaine du plan des x qui contient le point $x = 0$; des théorèmes très connus concernant la différentiation et l'intégration terme à terme d'une série infinie[1]) montreront que les deux formules susdites sont également applicables à cette fonction plus générale.

Nos deux formules en question (6) et (10) sont applicables à des fonctions beaucoup plus générales encore; cependant le cas susdit suffit pour nos recherches suivantes.

[1]) U. DINI: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse, pp. 523, 528; 1892.

Posons $\nu = \rho = 0$, les deux formules susdites deviennent évidemment identiques; ce cas particulier est dû à ABEL[1]), tandis que la formule plus générale (6) a été trouvée par M. N. DE SONIN[2]). Quant à la formule (10), elle est de moi; dans mon *Traité des fonctions cylindriques*[3]) je n'ai donné que le cas particulier qui correspond à $\nu = 0$.

Dans ce qui suit nous avons souvent besoin de diviser en deux parties chacune des identités que nous venons de développer.

A cet effet, posons d'abord:

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\rho}\,d\varphi, \tag{12}$$

nous aurons inversement:

$$f(x) = \frac{2\cos\rho\pi}{\pi}\cdot D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x\sin\psi)(x\sin\psi)(\operatorname{tg}\psi)^{2\rho}\,d\psi; \tag{12 bis}$$

posons ensuite:

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)(\cos\varphi)^{\nu}\cos(\rho\varphi)\,d\varphi, \tag{13}$$

nous aurons de même inversement:

$$f(x) = \frac{2}{\pi x^{\nu}}\cdot D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x\sin 2\psi)(x\sin 2\psi)^{\nu+1}(\cot\psi)^{\rho}\,d\psi. \tag{13 bis}$$

§ 2. Transformation d'une série de fonctions $P^{\nu,n}(x)$.

Comme première application de l'identité intégrale § 1, (6), nous avons à transformer la série de fonctions ultrasphériques[4])

$$f(\alpha x) = \Gamma(\nu)\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu + 2s) A^{\nu,2s}(\alpha) P^{\nu,2s}(x) \tag{1}$$

qui est supposée convergente sous les conditions suivantes:

A. *x doit être situé dans un domaine K (à une ou à deux dimensions) dans le plan des x qui contient le point $x = 0$.*

[1]) Journal de Crelle, t. 1, p. 155; 1826. Œuvres t. I, p. 99. ABEL donne, sous une autre forme, notre formule (6) dans le cas particulier, où ρ est supposé *réel*, de sorte que $\frac{1}{2} > \rho > -\frac{1}{2}$, tandis que M. DE SONIN indique la formule générale.

[2]) Mathematische Annalen, t. 16, p. 48; 1880. Acta Mathematica, t. 4, p. 171; 1884.

[3]) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 380; 1904.

[4]) Voir mon mémoire intitulé: Recherches sur les fonctions sphériques, p. 47 (285). Mém. de l'Acad. Royale de Danemark, 7e série, t. 2; 1906.

B. *α doit être situé dans un domaine L (à une ou à deux dimensions) dans le plan des α qui contient le point $\alpha = 0$.*

C. *La convergence dans le domaine L doit être uniforme.*

Cela posé, mettons dans (1) $x \cos \varphi$ au lieu de x et $\alpha \sin \psi$ au lieu de α, il résulte cette autre formule:

$$f(\alpha x \sin\psi \cos\varphi) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu + 2s) A^{\nu,\, 2s}(\alpha \sin\psi) P^{\nu,\, 2s}(x \cos\varphi), \tag{2}$$

où la série infinie qui figure au second membre de (2) est *uniformément* convergente, si nous faisons varier dans l'intervalle de 0 à $\pi : 2$ (les valeurs extrêmes 0 et $\pi : 2$ y comptées) les deux variables réelles φ et ψ. Remarquons encore que les deux fonctions

$$\alpha \sin\psi \cdot (\operatorname{tg}\psi)^{2\rho}, \qquad (\sin\varphi)^{2\rho}$$

sont intégrables toutes deux de 0 à $\pi : 2$, pourvu que $\frac{1}{2} > \Re(\rho) > -\frac{1}{2}$; il est évident que l'opération § 1, (6) est applicable terme à terme à la série infinie qui figure au second membre de (2).

Quant au résultat ainsi obtenu, il s'agit de déterminer tout d'abord l'intégrale définie

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P^{\nu,\, 2n}(x \cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\rho} d\varphi. \tag{3}$$

A cet effet, introduisons l'expression ordinaire de $P^{\nu,\, 2n}(x)$, savoir:

$$P^{\nu,\, 2n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\, \Gamma(\nu + 2n - s)}{s!\ (2n - 2s)!} \cdot (2x)^{2n-2s}, \tag{4}$$

la formule § 1, (4) donnera immédiatement:

$$J = \frac{\Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \Gamma(2n - s + \nu)\, \Gamma\left(n - s + \frac{1}{2}\right)}{s!\ \Gamma(2n - 2s + 1)\, \Gamma(n - s + \rho + 1)} \cdot x^{2n-2s};$$

appliquons maintenant la formule *eulérienne*

$$\sqrt{\pi}\ \Gamma(a) = \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \cdot 2^{a-1}, \tag{5}$$

il résulte après une légère transformation:

$$J = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu + n)}{2\,\Gamma(\nu)\, \Gamma(\rho + 1) \cdot n!} \cdot F(\nu + n,\ -n,\ \rho + 1,\ x^2) \tag{6}$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire.

Cela posé, mettons pour abréger:

$$\mathfrak{A}^{\nu,\rho,n}(\alpha) = \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \cdot D_\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} A^{\nu,2n}(\alpha\sin\psi)(\alpha\sin\psi)(\operatorname{tg}\psi)^{2\rho}d\psi; \tag{7}$$

nous aurons ce théorème général:

I. *La série de fonctions ultrasphériques* (1) *peut être transformée en une série de fonctions hypergéométriques comme suit:*

$$\frac{\pi}{\cos\rho\pi} f(\alpha x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\rho+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s(\nu+2s)\,\mathfrak{A}^{\nu,\rho,s}(\alpha)\,F(\nu+s, -s, \rho+1, x^2), \tag{8}$$

où il faut admettre $\frac{1}{2} > \Re(\rho) > -\frac{1}{2}$, *tandis que les coefficients* $\mathfrak{A}$ *se déterminent à l'aide de* (7); *les deux séries* (1) *et* (8) *sont en même temps convergentes ou divergentes.*

Quant au champ commun de convergence des deux séries (1) et (8), il est évident que (8) est convergente où l'est (1). Or, prenons pour point de départ (8), puis mettons-y $x\sin\psi$ au lieu de x et $\alpha\sin\varphi$ au lieu de α, l'identité § 1, (6) nous conduira immédiatement à la série de fonctions ultrasphériques (1). Telle est la démonstration complète de notre théorème susdit.

§ 3. Application aux séries de C. Neumann.

Supposons particulièrement que la fonction $f(x)$ que nous venons d'étudier dans le § 2 soit *paire* et holomorphe aux environs du point $x = 0$, de sorte que la série de puissances correspondante

$$f(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots + a_nx^{2n} + \dots \tag{1}$$

ait le rayon de convergence r, puis supposons $|\alpha| < r$; la série de fonctions ultrasphériques § 2, (1) deviendra une série *neumannienne* et elle est certainement convergente à l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^2 - 1} = 1, \quad x = \xi + i\eta \tag{2}$$

qui a son centre dans l'origine et ses foyers dans les deux points $(\pm 1, 0)$; dans ce qui suit nous désignons par $E(r, \alpha)$ l'aire située à l'intérieur de l'ellipse (2)[1]).

Le coefficient général $A^{\nu,\rho,2n}(\alpha)$ de la série *neumannienne* qui représente la série de puissances $f(\alpha x)$ se détermine par l'expression[2])

[1]) A la p. 53 (291) de mon mémoire cité p. 7 j'ai indiqué une équation fausse de l'ellipse de convergence (2). En effet, l'ellipse que j'ai indiquée est plus petite que (2). La raison de cette équation inexacte est à chercher dans le théorème démontré p. 32 (270) du mémoire susdit.

[2]) Recherches sur les fonctions sphériques, p. 47 (285).

$$A^{\nu,\,2n}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2n+2s)!\ a_{n+2s}}{s!\ \Gamma(\nu+2n+s+1)} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+2s}, \tag{3}$$

ce qui donnera pour $\mathfrak{A}^{\nu,\,\rho,\,n}(\alpha)$, en vertu de § 2, (7) et des formules *eulériennes* § 1, (3) et § 2, (5), cette expression analogue:

$$\mathfrak{A}^{\nu,\,\rho,\,n}(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\Gamma(\nu+n)}{n!\ \sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+s)!\ \Gamma(\rho+n+s+1)}{s!\ \Gamma(\nu+2n+s+1)} \cdot a_{n+2s} \cdot \alpha^{2n+2s}. \tag{4}$$

Appliquons ensuite la formule *eulérienne* § 1, (5), puis mettons pour abréger:

$$B^{\nu,\,\rho,\,n}(\alpha) = \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\rho+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\rho+n+s+1)}{\Gamma(\nu+2n+s+1)} \cdot \binom{n+s}{s} a_{2n+2s} \cdot \alpha^{2n+2s}, \tag{5}$$

il est très facile de démontrer cet autre théorème général:

II. *Pour la série de puissances* (1) *nous obtenons ce développement en série de fonctions hypergéométriques:*

$$f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu+2s)\, B^{\nu,\,\rho,\,s}(\alpha) \cdot F(\nu+s, -s, \rho+1, x^2), \tag{6}$$

où les deux paramètres ν *et* ρ *sont des quantités finies quelconques différentes des negatifs entiers, tandis que le coefficient général* B *se détermine à l'aide de* (5). *La série* (6) *est convergente où l'est la série neumannienne correspondante, savoir dans le domaine* $E(r, \alpha)$.

En effet, il ne nous reste plus qu'à étudier les conditions susdites des deux paramètres ν et ρ. Quant à ν, la condition susdite est évidente par ce qu'elle est nécessaire pour l'existence de la série *neumannienne* elle-même.

Étudions maintenant le paramètre ρ; la formule (6) est certainement démontrée pourvu que $\frac{1}{2} > \Re(\rho) > -\frac{1}{2}$. Introduisons ensuite cette autre série de puissances:

$$g(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2\,\Gamma(\rho+s+1)}{\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)} \cdot a_{2s} x^{2s}$$

qui à le même rayon de convergence que la série donnée $f(x)$ elle-même, nous aurons, en vertu de § 1, (3):

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\rho} d\varphi, \quad \Re(\rho) > -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Cela posé, étudions la série *neumannienne* correspondante

$$g(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu+2s)\, B_s(\alpha)\, P^{\nu,\,2s}(x), \tag{8}$$

qui est valable dans le domaine $E(r, \alpha)$; les deux identités (7) et § 2, (6) nous conduiront immédiatement à la formule (6), de sorte que cette dernière formule est applicable pour $\Re(\rho) > -\frac{1}{2}$.

Nous nous bornerons ici à ce développement, parce que la démonstration de (6) pour $\Re(\rho) \leqq -\frac{1}{2}$ sera assez pénible à cause des valeurs limites qu'il faut introduire.

§ 4. Séries de fonctions $F(\nu+n, -n, \rho+1, x)$.

Étudions maintenant plus amplement la série § 3, (6).

A cet effet, posons $x^2 = y$, $\alpha^2 = \beta$; il s'agit tout d'abord de déterminer ce que deviendra l'ellipse $E(r, \alpha)$ ayant l'équation § 3, (2), savoir, en posant $r^2 = \rho$:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{\rho}{|\beta|}\right)} + \frac{\eta^2}{\frac{\rho}{|\beta|} - 1} = 1; \tag{1}$$

posons ensuite $y = \xi_1 + i\eta_1$, il résulte

$$\xi_1 = \xi^2 - \eta^2, \quad \eta_1 = 2\xi\eta, \tag{2}$$

de sorte qu'il ne nous reste qu'à éliminer de (1) et (2) les deux coordinées ξ et ζ, ce qui s'effectuera sans peine; nous aurons par là l'équation suivante:

$$\frac{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\rho}{|\beta|} - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\eta_1{}^2}{\frac{\rho}{|\beta|}\left(\frac{\rho}{|\beta|} - 1\right)} = 1 \tag{3}$$

qui représente une ellipse ayant son centre en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et ses foyers aux deux points (0, 0) et (1, 0), tandis que son plus grand axe est égal à $\rho : |\beta| - \frac{1}{2}$.

Dans ce qui suit nous désignons par $\mathfrak{E}(\rho, \beta)$ l'aire située à l'intérieur de l'ellipse (3).

Supposons maintenant que la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{4}$$

ait son rayon de convergence égal à r, puis mettons pour abréger:

$$A^{\nu, \rho, n}(\alpha) = \frac{\Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\rho + 1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\rho + n + s + 1)}{\Gamma(\nu + 2n + s + 1)} \cdot \binom{n+s}{s} a_{n+s} \alpha^{n+s}; \tag{5}$$

nous aurons cet autre théorème général:

III. *Pour la série de puissances* (4) *nous obtenons ce développement en série de fonctions hypergéométriques:*

$$f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu + 2s)\, A^{\nu, \rho, s}(\alpha)\, F(\nu + s, -s, \rho + 1, x), \tag{6}$$

où les paramètres ν *et* ρ *ne doivent pas être égaux à un négatif entier, mais étant du reste complètement arbitraires. Le coefficient général* A *se détermine à l'aide de* (5), *et la série* (6) *est convergente dans le domaine* $\mathfrak{E}(r, \alpha)$.

La série (6), qui est certainement nouvelle, est évidemment de même nature que les séries *neumanniennes.*

En effet, les deux formules (6) et § 2, (1) sont des identités *formelles* qui permettent de déduire *formellement* les séries de fonctions P ou F en développant chacune des puissances qui figurent aux premiers membres des formules susdites. Mais d'un autre coté, *les séries ainsi obtenues et la série de puissances donnée ne possèdent pas le même champ de convergence.*

Considérons par exemple les trois fonctions particulières

$$f(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f(x) = \frac{1}{4+x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$$

qui sont toutes les trois holomorphes aux environs du point $x = 0$; les ellipses de convergence des séries *neumanniennes* correspondantes ont, pour $\alpha = 1$, les équations

$$\frac{\xi^2}{4} + \frac{\eta^2}{3} = 1, \quad \frac{\xi^2}{5} + \frac{\eta^2}{4} = 1, \quad \frac{\xi^2}{\left(\frac{5}{4}\right)} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 1, \quad .$$

tandis que les séries tirées de (6) en mettant $\alpha = 1$ sont convergentes à l'intérieur des ellipses suivantes:

$$\frac{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)} + \frac{\eta_1{}^2}{2} = 1, \quad \frac{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{21}{4} - \sqrt{5}} + \frac{\eta_1{}^2}{5 - \sqrt{5}} = 1, \quad \frac{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right)} + \frac{\eta_1{}^2}{\left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{4}\right)} = 1.$$

Comme applications directes de (6), considérons d'abord la formule élémentaire

$$x^n = \frac{\Gamma(\rho + n + 1)}{\Gamma(\rho + 1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot \frac{(\nu + 2s)\ \Gamma(\nu + s)}{\Gamma(\nu + n + s + 1)} \cdot F(\nu + s, -s, \rho + 1, x) \quad (7)$$

qui est valable dans toute l'étendue du plan des x; en second lieu la fonction cylindrique de première espèce donnera ce développement très connu[1]):

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha x}}\right)^\rho J^\rho(\sqrt{\alpha x}) = \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu + 2s)\ \Gamma(\nu + s)}{s!\ \Gamma(\rho + 1)} \cdot J^{\nu + 2n}(\sqrt{\alpha}) \cdot F(\nu + s, -s, \rho + 1, x) \ (8)$$

applicable pour des valeurs finies quelconques de x et de α.

[1]) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 275; 1904.

§ 5. Séries des fonctions hypergéométriques générales.

Comme une application plus importante du théorème III, nous tirons directement de § 4, (6), après une légère modification des significations, ce développement d'une fonction hypergéométrique générale:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{-\beta}{s} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\delta+2s)} \cdot y^s \cdot \\ \cdot F(\alpha+s, \beta+s, \delta+2s+1, y) \cdot F(\delta+s, -s, \gamma, x), \tag{1}$$

où la série ainsi obtenue est convergente dans le domaine $\mathfrak{E}\,(1, y)$, et où il faut admettre $|y| < 1$; de plus, il faut supposer que ni γ ni δ ne sont égaux à un négatif entier.

Posons particulièrement dans (1) $x = 1$, ce qui est permis, puis remplaçons y par x; la formule de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{2}$$

donnera:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{\Gamma(\delta-\gamma+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\beta+s)\,\Gamma(\delta-\gamma+s+1)}{s!\,\Gamma(\gamma+s)\,\Gamma(\delta+2s)} \cdot \\ \cdot x^s \cdot F(\alpha+s, \beta+s, \delta+2s+1, x), \tag{3}$$

formule qui est valable, pourvu que $|x| < 1$; on voit que l'hypothèse $\delta = \gamma$ donnera, en vertu de (3), cette formule plus élégante:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)\,\Gamma(\gamma+2s)} \cdot x^s \cdot F(\alpha+s, \beta+s, \gamma+2s+1, x). \tag{4}$$

Cela posé, cherchons ensuite dans les deux membres de (1) les coefficients de la puissance x^n, puis mettons x et γ au lieu de y et δ, il résulte ce développement:

$$x^n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\,\Gamma(\alpha+n+s)\,\Gamma(\beta+n+s)\,\Gamma(\gamma+2n+s)}{s!\,\Gamma(\gamma+2n+2s)\,\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)} \cdot x^{n+s} \cdot \\ \cdot F(\alpha+n+s, \beta+n+s, \gamma+2n+2s+1, x), \tag{5}$$

valable, pourvu que $|x| < 1$.

Considérons maintenant la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{6}$$

dont le rayon de convergence est égal à r, puis développons, en vertu de (5), toutes les puissances qui figurent au second membre de (6), nous aurons une série à double entrée $\varDelta$, dont les séries horizontales sont les développements susdits, ordonnés de sorte que tous les termes qui contiennent la même fonction hypergéométrique forment les séries verticales de Δ; il est évident que les séries verticales de Δ se présentent sous cette forme:

$$\left.\begin{aligned} h_n = x^n \cdot F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + 2n + 1, x) \cdot \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + 2n)} \cdot \\ \cdot \sum_{s=0}^{s=n}{}' \frac{(-1)^s \Gamma(\gamma + n + s)}{(n-s)!\ \Gamma(\alpha + s)\ \Gamma(\beta + s)} \cdot a_s . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Supposons maintenant $|x| < 1$ et $|x| < r$, les séries horizontales et les séries verticales de Δ seront convergentes comme des séries de puissances, de sorte qu'il est permis de sommer d'abord les séries verticales, ce qui donnera le théorème suivant:

IV. *La série de puissances* (6) *est développable en série de fonctions hypergéométriques comme suit:*

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' (-1)^s A_s x^s \cdot F(\alpha + s, \beta + s, \gamma + 2s + 1, x), \tag{8}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$A_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)\ \Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + 2n)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n}{}' \frac{(-1)^s\ \Gamma(\gamma + n + s)}{(n-s)!\ \Gamma(\alpha + s)\ \Gamma(\beta + s)} \cdot a_s, \tag{9}$$

tandis qu'il faut supposer que γ n'est pas égal à zéro ni à un négatif entier. La série (8) *est convergente pourvu que nous ayons à la fois $|x| < 1$, $|x| < r$.*

Ce théorème général, qui est certainement nouveau, présente un intérêt particulier, parce que la série (8) est applicable à des fonctions qui ont un point ordinaire dans le point $x = +1$, lequel est singulier pour les fonctions hypergéométriques.

Remarquons encore que la série (8) est à considérer comme une généralisation très étendue des séries *neumanniennes* de première espèce selon des fonctions cylindriques.

En effet, prenons pour point de départ la formule de P.-A. Hansen[1]):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \cdot J^{\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \cdot \lim F\left(k, k', \nu + 1, -\frac{x^2}{4kk'}\right), \tag{10}$$

où il faut faire croître au delà de toute limite les deux paramètres k et k', puis mettons dans (8) et (9) $(-1)_s a_{2s} (kk')^s$ au lieu de a_s et $-x^2 : (kk')$ au lieu de x, nous aurons *formellement* ce développement:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}{}' a_{2s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\gamma} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' b_s J^{\gamma + 2s}(x), \tag{11}$$

[1]) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 10; 1904.

où nous avons posé pour abréger:

$$b_n = (\gamma + 2n) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(\gamma + n + s)}{(n-s)!} \cdot a_{2s}; \tag{12}$$

c'est-à-dire précisément la série *neumannienne* de première espèce[1]).

Du reste, il est facile de rendre rigoureuse cette démonstration de l'existence des séries *neumanniennes*; cependant une telle démonstration rigoureuse ne présente aucun intérêt particulier, parce que nous connaissons déjà à fond les séries en question.

§ 6. Autres propriétés des séries de fonctions sphériques.

Dans mes *Recherches sur les fonctions sphériques*[2]) j'ai déduit quelques propriétés communes des coefficients de la série *neumannienne*

$$f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu + s)\, A^{\nu, s}(\alpha)\, P^{\nu, s}(x); \tag{1}$$

en terminant ces recherches sur la transformation de la série (1) il me semble utile de développer d'autres propriétés des coefficients susdits en démontrant ce théorème:

V. *Les coefficients* $A^{\nu, n}(\alpha)$ *qui figurent au second membre de* (1) *satisfont à ces deux équations fonctionnelles:*

$$(\nu + n + 1)\, A^{\nu+1, n}(\alpha) = A^{\nu, n}(\alpha) - A^{\nu, n+2}(\alpha) \tag{2}$$

$$\alpha D_\alpha A^{\nu+1, n}(\alpha) = n A^{\nu, n}(\alpha) + (n + 2\nu + 2)\, A^{\nu, n+2}(\alpha), \tag{3}$$

et cela quelle que soit la fonction $f(x)$.

Pour démontrer la formule (2) prenons pour point de départ l'identité[3])

$$(s + \nu) P^{\nu, s}(x) = \nu \left(P^{\nu+1, s}(x) - P^{\nu+1, s-2}(x)\right)$$

nous aurons, en vertu de (1):

$$f(\alpha x) = \Gamma(\nu + 1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(A^{\nu, s}(\alpha) - A^{\nu, s+2}(\alpha)\right) \cdot P^{\nu+1, s}(x);$$

car nous aurons toujours pour n positif entier[4])

$$P^{\nu, -n}(x) = 0.$$

Posons ensuite dans (1) $\nu + 1$ au lieu de ν, puis remarquons qu'une fonction ne peut être développée que d'une seule façon dans une série *neumannienne* pour

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 272.
[2]) loc. cit. p. 53 (291).
[3]) loc. cit. p. 15 (253).
[4]) loc. cit. pp. 34 (272), 14 (252).

laquelle le paramètre ν a une valeur déterminée; nous trouvons immédiatement la formule (2).

En second lieu appliquons l'identité [1])

$$2(\nu + n) x P^{\nu, n}(x) = (n + 1) P^{\nu, n+1}(x) + (n + 2\nu - 1) P^{\nu, n-1}(x);$$

nous aurons, en vertu de (1):

$$2x f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(s A^{\nu, s-1}(\alpha) + (s + 2\nu) A^{\nu, s+1}(\alpha)\right) \cdot P^{\nu, s}(x), \tag{4}$$

où nous avons à poser $A^{\nu, -1}(\alpha) = 0$.

Cela posé, différentions par rapport à x la formule (1), puis appliquons les identités [1])

$$D_x P^{\nu, n}(x) = 2\nu \cdot P^{\nu+1, n-1}(x), \qquad P^{\nu, 0}(x) = 1,$$

nous aurons:

$$\alpha f^{(1)}(\alpha x) = 2\Gamma(\nu + 1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s + \nu + 1) A^{\nu, s+1}(\alpha) \cdot P^{\nu+1, s}(x); \tag{5}$$

posons ensuite dans (1) $\nu + 1$ au lieu de ν, une différentiation par rapport à α donnera:

$$x f^{(1)}(\alpha x) = \Gamma(\nu + 1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s + \nu + 1) D_\alpha A^{\nu+1, s}(\alpha) \cdot P^{\nu+1, s}(x),$$

d'où en multipliant par x la formule (5), puis appliquant la transformation (4), nous aurons immédiatement la formule (3).

Remarquons en passant que les formules (2) et (3) sont des généralisations des équations fonctionnelles que j'ai prises comme définitions des fonctions *cylindriques* [2]).

En effet, mettons:

$$A^{\nu, n}(\alpha) = i^n \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\nu C^{\nu+n}(\alpha),$$

nous aurons, en vertu de (2) et (3), si nous posons encore $n - 1$ au lieu de n:

$$\frac{2(\nu + n)}{\alpha} \cdot C^{\nu+n}(\alpha) = C^{\nu+n-1}(\alpha) + C^{\nu+n+1}(\alpha)$$

$$2 D_\alpha C^{\nu+n}(\alpha) = C^{\nu+n-1}(\alpha) - C^{\nu+n+1}(\alpha);$$

c'est-à-dire que la fonction $C^{\nu+n}(\alpha)$ coïncide avec la fonction cylindrique de première espèce $J^{\nu+n}(\alpha)$.

[1]) Recherches sur les fonctions sphériques, pp. 34 (272), 14 (252).

[2]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 1.

CHAPITRE II.

Applications aux fonctions cylindriques.

§ 7. Sur la fonction de Lommel.

Il est intéressant, ce me semble, que notre première généralisation de l'identité d'Abel est également applicable à une série de fonctions cylindriques. Pour effectuer la transformation correspondante, nous avons à prendre pour point de départ la formule intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J^a(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2b-1}}{(\cos\varphi)^{a-1}}\,d\varphi = \frac{\Gamma(b)}{2\cos b\pi}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^b\cdot\; \Pi^{a-b,\,a+b}(x), \tag{1}$$

où $\Pi^{\nu,\,\rho}(x)$ désigne la fonction de Lommel, savoir:

$$\Pi^{\nu,\,\rho}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(\nu-\rho)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}+s+1\right)}, \tag{2}$$

tandis qu'il faut admettre $\Re(b) > 0$. La formule (1) peut être démontrée si nous introduisons la série ordinaire qui représente la fonction cylindrique $J^a(x)$, et si nous appliquons ensuite l'intégrale *eulérienne* de première espèce § 1, (3).

Il saute aux yeux que la fonction de Lommel est une généralisation de la fonction cylindrique de première espèce; nous aurons en effet:

$$\Pi^{a,\,a}(x) = J^a(x), \qquad \Pi^{a,\,-a}(x) = \cos a\pi\cdot J^a(x); \tag{3}$$

dans ce qui suit nous avons à faire usage de ces autres cas particuliers de la fonction de Lommel:

$$\Pi^\nu(x) = \Pi^{\nu,\,0}(x) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(s-\frac{\nu}{2}+1\right)} \tag{4}$$

$$X^\nu(x) = \Pi^{\nu,\,1}(x) = \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)} \tag{5}$$

$$Z^\nu(x) = \lim_{\rho=\nu+1}\frac{\Pi^{\nu,\,\rho}(x)}{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\rho)} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s+\nu+\frac{3}{2}\right)}. \tag{6}$$

Appliquons ensuite la méthode ordinaire, nous obtenons cette autre formule intégrale analogue à (1):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z^a(x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi}{(\cos\varphi)^{a-1}} = \frac{\Gamma(b)}{2\sin b\pi}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^b\cdot\, \Pi^{a-b,\,a+b+1}(x)\,, \tag{7}$$

où il faut admettre aussi $\Re(b) > 0$.

Cela posé, il est évident que la formule (1) nous permet de déduire directement une suite d'intégrales définies qui contiennent la fonction de Lommel, en transformant simplement des intégrales correspondantes contenant une fonction cylindrique.

Or, de telles intégrales étant restées inaperçues jusqu'à présent, il nous semble utile de les développer ici dans leur ensemble.

1°. La formule élémentaire[1])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^\nu(x\cos\varphi)\,(\cos\varphi)^{\nu+1}(\sin\varphi)^{2\rho-1}\,d\varphi = \frac{2^{\rho-1}\Gamma(\rho)}{x^\rho}\cdot J^{\nu+\rho}(x)\,,$$

où il faut admettre $\Re(\rho) > 0$ et $\Re(\nu) > -1$, donnera immédiatement, après une légère modification des significations, la formule correspondante

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Pi^{\nu,\,\rho}(x\cos\varphi)\,(\cos\varphi)^{\nu+1}(\sin\varphi)^{2\sigma-1}\,d\varphi = \frac{\Gamma(\sigma)}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^\sigma\cdot\, \Pi^{\nu+\sigma,\,\rho+\sigma}(x)\,, \tag{8}$$

où il faut admettre $\Re(\sigma) > 0$, $\Re(\rho+\nu) > -2$; du reste, il est très facile de déduire directement la formule (8).

2°. L'intégrale fondamentale de M. H. Weber[2])

$$\int_0^\infty J^\nu(tx)\,t^\rho\,dt = \frac{2^\rho}{x^{\rho+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\rho+1}{2}\right)}\,, \tag{9}$$

où il faut admettre x positif réel, $\Re(\nu+\rho) > -1$ et $\Re(\rho) < \frac{1}{2}$, donnera comme formule correspondante celle-ci:

$$\int_0^\infty \Pi^{\nu,\,\rho}(tx)\,t^\sigma\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+\rho+\sigma}{2}\right)\cos\frac{\rho-\nu}{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\cos\frac{\pi}{2}(\rho+\sigma)}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{\sigma+1}, \tag{10}$$

où il faut admettre x positif réel, $\Re(\rho-\nu) > 0$, $\Re(\rho+\sigma) > -1$ et $1 > \Re(2\sigma+\rho-\nu)$, conditions qui s'accordent bien avec la série (2) et la série asymptotique obtenue pour $\Pi^{\nu,\,\rho}(x)$[3]).

3°. La représentation intégrale[4])

$$(-1)^n\int_y^\infty J^\nu(tx)\,(t^2-y^2)^{n-1}t^{\nu+1}\,dt = \frac{(n-1)!\;2^{n-1}y^{\nu+n}}{x^n}\cdot J^{\nu+n}(xy)$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 181. [2]) p. 189. [3]) p. 228. [4]) p. 222.

donnera après une légère modification des significations:

$$(-1)^n \int_y^\infty \Pi^{\nu,\rho}(tx)(t^2-y^2)^{n-1} t^{\frac{\nu+\rho}{2}+1} dt = \frac{(n-1)!\, 2^{n-1} y^{n+\frac{\nu+\rho}{2}}}{x^n} \cdot \Pi^{\nu+n,\rho+n}(xy), \tag{11}$$

où il faut admettre x positif réel, n positif entier et $\Re(\nu+\rho+4n) < 3$.

La formule (1) admet de très belles applications aux intégrales discontinues que j'ai étudiées dans le chapitre XVIII de mon *Traité des fonctions cylindriques.*

4°. Considérons en premier lieu la formule[1])

$$\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{x^2+t^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1} dt = 0, \tag{12}$$

où il faut admettre $x > y \geqq 0$, tandis que n et p sont des entiers non négatifs et $\Re(\nu+n) > -1$, $\Re(\sigma-\nu) > 2n+2p+1$, nous aurons immédiatement la formule correspondante

$$\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1} dt = 0, \tag{13}$$

où il faut admettre $x > y \geqq 0$, $\Re(\nu+n) > -1$, $\Re(\rho+\sigma-2\nu) > 4n+4p+2$, $\Re(\rho) > \Re(\sigma)$.

5°. En second lieu, la formule analogue[2])

$$\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot Y^\nu(tx)\, t^{\nu+2n} dt = 0, \tag{14}$$

où il faut admettre $x > y \geqq 0$, $\Re(\nu+n) > -1$, $\Re(\sigma-\nu) > 2n+2p-1$, tandis que n et p sont des entiers non négatifs, donnera:

$$\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot Y^\nu(tx)\, t^{\nu+2n} dt = 0, \tag{15}$$

formule qui est valable pourvu que $x > y \geqq 0$, $\Re(\nu+n) > -1$, $\Re(\rho+\sigma-2\nu) > 4n+4p-2$, $\Re(\rho-\sigma) > 0$.

6°. Prenons maintenant pour point de départ la formule[3])

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot \frac{J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1}}{t^2+u^2}\, dt = \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{z^2-u^2}\right)}{(z^2-u^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot H_1^\nu(xui)\, u^{\nu+2n} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 252. [2]) p. 252. [3]) p. 257.

qui est valable pourvu que $x > y \geqq 0$, $\Re(\nu + n) > -1$, $\Re(\sigma - \nu) > 2n + 2p - 2$, tandis que n et p sont des entiers non négatifs, nous aurons la formule correspondante:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot \frac{J^\nu(tx)\,t^{\nu+2n+1}}{t^2+u^2}\,dt = \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{z^2-u^2})}{(z^2-u^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot H_1^\nu(xui)\,u^{\nu+2n} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

où il faut admettre $x > y \geqq 0$, $\Re(\nu + n) > -1$, $\Re(\rho + \sigma - 2\nu) > 4n + 4p - 2$, $\Re(\rho) > \Re(\sigma)$.

La fonction H qui figure dans les deux dernières formules est la fonction de Hankel, savoir:

$$H_1^\nu(x) = J^\nu(x) + iY^\nu(x).$$

Cela posé, mettons dans (17) $z = u$, ce qui est permis, l'intégrale ainsi obtenue aura pour $p > 0$ la valeur zéro; dans le cas particulier $p = 0$ nous aurons au contraire:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}+1}} \cdot J^\nu(tx)\,t^{\nu+2n+1}\,dt = \\ &= (-1)^n \frac{\pi y^\sigma z^{\nu+2n}\cos\frac{\pi}{2}(\sigma-\rho)}{2^{\sigma+1}\,\Gamma\left(\frac{\sigma+\rho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\rho}{2}+1\right)} \cdot H_1^\nu(xzi)\,e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Posons encore dans (17) $u = 0$, la valeur de l'intégrale ainsi obtenue sera égale à zéro, pourvu que $n > 0$ et $\Re(\nu) > -n$; dans le cas particulier $n = 0$ nous aurons au contraire:

$$\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}}}\,J^\nu(tx)\,t^{\nu-1}\,dt = \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)}{x^\nu z^\sigma} \cdot \Pi^{\rho,\sigma}(yz). \tag{19}$$

7°. Étudions en dernier lieu la formule analogue à (16)[1]:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{J^\sigma(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot \frac{Y^\nu(tx)\,t^{\nu+2n}}{t^2+u^2}\,dt = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{J^\sigma(y\sqrt{z^2-u^2})}{(z^2-u^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot H_1^\nu(xui)\,u^{\nu+2n-1} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i},\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

où il faut admettre $x > y \geqq 0$, $\Re(\nu + n) > -\frac{1}{2}$, $\Re(\sigma - \nu) > 2n + 2p - 1$, tandis que n et p doivent être des entiers non négatifs; nous aurons:

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 257.

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}}\cdot\frac{Y^\nu(tx)\,t^{\nu+2n}}{t^2+u^2}\,dt=\\&=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{z^2-u^2})}{(z^2-u^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}}\cdot H_1^\nu(xui)\,u^{\nu+2n-1}\cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i},\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

où il faut admettre $x > y$, $\Re(\nu+n) > -\frac{1}{2}$, $\Re(\rho+\sigma-2\nu) > 4n+4p-1$, $\Re(\rho) > \Re(\sigma)$.

Posons ensuite dans (21) $u = z$, l'intégrale ainsi obtenue aura pour $p > 0$ la valeur zéro; pour $p = 0$ nous aurons au contraire:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\Pi^{\rho,\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}+1}}\cdot Y^\nu(tx)\,t^{\nu+2n}dt=\\&=(-1)^{n-1}\frac{\pi y^\sigma z^{\nu+2n-1}\cos\frac{\pi}{2}(\sigma-\rho)}{2^{\sigma+1}\,\Gamma\left(\frac{\sigma+\rho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\rho}{2}+1\right)}\cdot H_1^\nu(xzi)\cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}.\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

§ 8. Séries de fonctions de Lommel.

Prenons maintenant pour point de départ la formule intégrale § 7, (1); il est très facile de démontrer ce théorème général:

VI. *Supposons que la série de fonctions cylindriques*

$$f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\rho\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s(\alpha)\,J^\nu(p_s x) \tag{1}$$

satisfasse aux conditions énumérées dans le § 2, nous aurons ce développement en série de fonctions de Lommel:

$$f(\alpha x) = \frac{\Gamma(\sigma)\operatorname{tg}\sigma\pi}{\pi 2^\nu}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{\rho+\sigma}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\mathfrak{A}_s(\alpha)\cdot\frac{\Pi^{\nu-\sigma,\,\rho+\sigma}(p_s x)}{p_s{}^\sigma}, \tag{2}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathfrak{A}_n(\alpha) = \alpha^{\nu-\rho-1}\cdot D_\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{A_n(\alpha\sin\varphi)\,(\operatorname{tg}\varphi)^{2\sigma-1}}{(\alpha\sin\varphi)^{\nu-\rho-2}}\,d\varphi, \tag{3}$$

tandis qu'il faut supposer $0 < \Re(\sigma) < 1$[1]. *Ces conditions remplies, la série* (2) *est convergente, pourvu que la série donnée* (1) *le soit.*

En effet, posons

$$F(\alpha x) = \left(\frac{2}{\alpha x}\right)^{\nu-\rho-1} f(\alpha x),$$

[1]) Il faut remarquer que dans (2) $\Pi^{\nu-\sigma,\,\rho+\sigma}\cdot(x)$ contient le facteur $\cos\sigma\pi$.

il résulte, en vertu de (1):

$$F(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu - 1} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s(\alpha)}{\alpha^{\nu - \rho - 1}} \cdot J^{\nu}(p_s x),$$

de sorte que la méthode expliquée dans le § 2 nous conduira immédiatement au but.

Le théorème VI que nous venons de démontrer nous permet des applications nettes aux séries de Fourier-Dini et de Schlömilch.

1°. *Séries de Fourier-Dini:* Supposons ν égal à un nombre réel plus grand que -1, puis désignons par p_s les racines (toutes réelles) de l'équation transcendante:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} J^{\nu}(x) = 0,$$

M. Dini[1]) a démontré l'existence d'une série de la forme

$$f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s(\alpha) J^{\nu}(p_s x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

de sorte que nous avons à poser dans (1) $\rho = 0$ pour appliquer nos formules générales au développement (4).

Comme exemple des séries de M. Dini j'ai donné entre autres ce développement[2]):

$$\frac{x^{\rho} \cdot \cos \frac{\pi}{2}(\nu - \rho)}{\Gamma\left(\frac{\rho + \nu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\rho - \nu}{2} + 1\right)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{2}{p_s}\right)^{\rho + 1} \cdot \frac{\Pi^{\nu, \rho + 2}(p_s)}{J^{\nu + 1}(p_s)} \cdot J^{\nu}(p_s x), \tag{5}$$

ce qui donnera, en vertu de § 7, (1)

$$K \cdot x^{\rho + \sigma} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{2}{p_s}\right)^{\rho + \sigma + 1} \cdot \frac{\Pi^{\nu, \rho + 2}(p_s)}{J^{\nu + 1}(p_s)} \cdot \Pi^{\nu - \sigma, \rho + \sigma}(p_s x), \tag{6}$$

où nous avons posé pour abréger

$$K = \frac{\Gamma(\sigma) \cdot \cos \sigma\pi \cos \frac{\pi}{2}(\nu - \rho)}{2\,\Gamma\left(\frac{\rho + \nu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\rho - \nu}{2} + 1\right)}. \tag{6 bis}$$

2°. *Séries de Schlömilch*[3]): Dans ce cas nous avons à poser dans (1) $p_s = s$, $\rho = \nu$.

La formule § 7, (7) montre du reste clairement que notre théorème permet de transformer une série plus générale de la forme[4])

$$f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(A_s(\alpha)\, J^{\nu}(sx) + B_s(\alpha)\, Z^{\nu}(sx)\right) \tag{7}$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 353. [2]) p. 356. [3]) p. 356. [4]) p. 348.

en une autre de cette forme:

$$f(ax) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\rho+\sigma}\left(\sum_{s=1}^{s=\infty}\mathfrak{A}_s(\alpha)\, \Pi^{\nu-\sigma,\rho+\sigma}(sx) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\mathfrak{B}_s(\alpha)\, \Pi^{\nu-\sigma,\rho+\sigma+1}(sx)\right). \quad (8)$$

Remarquons en passant que la méthode qui nous a donné le théorème VI nous conduira de l'intégrale définie

$$\int_a^b J^\nu(tx)\, F(t,y)\, dt = x^\sigma \cdot \Xi(xy) \quad (9)$$

à cette autre:

$$\int_a^b \Pi^{\nu-\sigma,\nu+\rho}(tx)\, t^{-\rho}\, K(t,y)\, dt = \frac{\pi \cot \rho\pi}{2\,\Gamma(\rho)} \cdot x^{\rho+\sigma} \cdot \Xi(xy), \quad (10)$$

où nous avons posé pour abréger

$$K(t,y) = y^{\nu-\sigma-1} \cdot Dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t, y\sin\psi)\,(y\sin\psi)^{2+\sigma-\nu} \cdot (\operatorname{tg}\psi)^{2\rho-1}\, d\psi. \quad (11)$$

Nous connaissons une suite d'intégrales définies du genre (9); cependant les fonctions correspondantes (11) deviendront si compliquées que la transformation susdite ne présentera qu'un intérêt assez médiocre.

§ 9. Sur le produit de deux fonctions cylindriques.

Appliquons maintenant à la série ordinaire qui représente la fonction cylindrique de première espèce la formule générale § 1, (9), puis appliquons ce développement[1]):

$$J^a(x)\, J^b(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{a+b+2s}{s}}{\Gamma(a+s+1)\,\Gamma(b+s+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2s}, \quad (1)$$

nous aurons immédiatement la formule élégante:

$$J^{\frac{\nu+\rho}{2}}(x)\, J^{\frac{\nu-\rho}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^\nu(2x\cos\varphi)\cos(\rho\varphi)\, d\varphi, \quad (2)$$

valable pourvu que $\Re(\nu) > -1$.

On connaît depuis longtemps des cas particuliers de (2)[2]); néanmoins la formule générale (2) est nouvelle.

Appliquons maintenant l'intégrale de Bessel[3])

$$J^\nu(x) = \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\psi)\,(\cos\psi)^{2\nu}\, d\psi, \quad (3)$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 20. [2]) p. 63. [3]) p. 51.

où il faut admettre $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$; nous aurons, en vertu de (2), pour le produit de deux fonctions cylindriques cette intégrale double:

$$J^{\frac{\nu+\rho}{2}}(x)\,J^{\frac{\nu-\rho}{2}}(x) = \frac{4\cdot x^{\nu}}{\sqrt{\pi^3}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x\sin\psi\cos\varphi)(\cos\varphi)^{\nu}(\cos\psi)^{2\nu}\cos(\rho\varphi)\,d\varphi\,d\psi, \quad (4)$$

où il faut admettre $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$.

Remarquons encore en passant que la formule § 1, (13 bis) donnera cette inversion de la formule intégrale (2):

$$J^{\nu}(x) = \frac{1}{2}D_x\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\frac{\nu+\rho}{2}}\left(\frac{x\sin 2\psi}{2}\right)J^{\frac{\nu-\rho}{2}}\left(\frac{x\sin 2\psi}{2}\right)(x\sin 2\psi)(\cot\psi)^{\rho}\,d\psi, \quad (5)$$

où il faut admettre $\Re(\nu-\rho) > -2$.

Il saute aux yeux que la formule intégrale (2) est applicable à la plupart des intégrales que nous avons transformées dans le § 7.

1°. L'intégrale de M. Weber § 7, (9) donnera après une légère modification des significations cette autre formule:

$$\int_0^{\infty} J^{\nu}(tx)J^{\rho}(tx)t^{\sigma}dt = \frac{2^{\sigma}x^{-\sigma-1}\,\Gamma\left(\frac{1+\nu+\rho+\sigma}{2}\right)\Gamma(-\sigma)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\rho-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu+\rho-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu+\rho-\sigma}{2}\right)}, \quad (6)$$

où il faut admettre $x > 0$, $\Re(\nu+\rho+\sigma) > -1$ et $\Re(\sigma) < 0$; la formule (6) est très connue[1]); mais notre démonstration est nouvelle. Remarquons en passant que ce développement de la formule (6) nous donnera une nouvelle démonstration de la formule de Gauss concernant la valeur de $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$.

2°. Les intégrales § 7, (12) et (14) donnent de même immédiatement ces deux autres

$$\int_0^{\infty}\frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)\,J^{\frac{\sigma-\tau}{2}}(y\Omega)}{\Omega^{\sigma-2p}}\cdot J^{\nu}(tx)\cdot t^{\nu+2n+1}dt = 0. \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)\,J^{\frac{\sigma-\tau}{2}}(y\Omega)}{\Omega^{\sigma-2p}}\cdot Y^{\nu}(tx)\cdot t^{\nu+2n}dt = 0, \quad (8)$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\Omega = \sqrt{t^2+z^2}, \quad (9)$$

tandis qu'il faut ajouter aux conditions précédentes ces deux autres: $x > 2y$ et $\Re(\sigma) > -1$.

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 194.

3°. Posons encore pour abréger:

$$\omega = \sqrt{z^2 - u^2}; \tag{10}$$

les deux formules § 7, (16) et (20) donnent ici ces formules analogues:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)\, J^{\frac{\sigma-\tau}{2}}(y\Omega)}{\Omega^{\sigma-2p}} \cdot \frac{J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1}}{t^2+u^2}\, dt = \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\omega)\, J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\omega)}{\omega^{\sigma-2p}} \cdot H_1^\nu(xui) \cdot u^{\nu+2n} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)\, J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)}{\Omega^{\sigma-2p}} \cdot \frac{Y^\nu(tx)\, t^{\nu+2n}}{t^2+u^2}\, dt = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\omega)\, J^{\frac{\sigma-\tau}{2}}(y\omega)}{\omega^{\sigma-2p}} \cdot H_1^\nu(xui) \cdot u^{\nu+2n-1} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Mettons ensuite dans (11) $u = z$, l'intégrale ainsi obtenue deviendra égale à zéro pour $p > 0$; le cas particulier $p = 0$ donnera au contraire:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)\, J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)}{\Omega^{\sigma-2p+2}} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1}\, dt = \\ &= \frac{(-1)^n \pi\, y^\sigma z^{\nu+2n} 2^{-\sigma-1}}{\Gamma\left(\frac{\sigma+\tau}{2}+1\right)\, \Gamma\left(\frac{\sigma-\tau}{2}+1\right)} \cdot H_1^\nu(xzi)\, e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Posons enfin dans (11) $u = 0$, la valeur de l'intégrale ainsi obtenue est zéro pourvu que $n > 0$ et $\Re(\nu) > -n$; dans le cas particulier $n = 0$ nous aurons:

$$\int_0^\infty \frac{J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(y\Omega)\, J^{\frac{\sigma-\tau}{2}}(y\Omega)}{\Omega^\sigma} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu-1} dt = \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)}{x^\nu z^\sigma} \cdot J^{\frac{\sigma+\tau}{2}}(yz)\, J^{\frac{\sigma-\tau}{2}}(yz). \tag{14}$$

§ 10. Séries de produits de deux fonctions cylindriques.

Comme une application beaucoup plus importante encore de la formule intégrale § 9, (2) nous avons à démontrer le théorème:

VII. *Supposons que la série de fonctions cylindriques*

$$x^\mu f(\alpha x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s(\alpha) J^{\nu_s}(p_s x) \tag{1}$$

satisfasse aux conditions énumérées dans le § 2, nous aurons cet autre développement:

$$x^{\mu} f(ax) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \mathfrak{A}_s\left(\frac{a}{2}\right) J^{\frac{\nu_s+\rho}{2}}(p_s x)\, J^{\frac{\nu_s-\rho}{2}}(p_s x), \tag{2}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$a\, \mathfrak{A}_n(a) = D_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(a \sin 2\psi)\,(a \sin 2\psi)^{\mu+1} (\cot \psi)^{\rho}\, d\psi. \tag{3}$$

La série (2) est certainement convergente, pourvu que x et a soient situés dans des domaines K_1 et L_1 obtenus en multipliant K par $\frac{1}{2}$ et L par 2 par rapport aux points $x = 0$ et $a = 0$ respectivement.

On voit que le théorème VII est une conséquence immédiate des formules § 9, (2) et § 1, (10).

Inversement, prenons pour point de départ la formule (2), le même procédé nous conduira à (1), si nous appliquons la formule § 9, (5).

Il est évident que le théorème VII est d'une portée très étendue, parce que la série (1) contient les deux suites de nombres quelconques ν_s et p_s. Nous avons à étudier plus amplement les séries suivantes:

1°. *Les séries de C. Neumann:* Posons dans (1) $\nu_s = \nu + s - 1$, $p_s = 1$ et $\mu = \nu$; la série ainsi obtenue est la série *neumannienne* de première espèce, de sorte que notre théorème nous conduira immédiatement aux séries *neumanniennes* de seconde espèce.

Il est très intéressant, ce me semble, de constater que les premiers rudiments des transformations générales que nous venons d'étudier ici se trouvent dans le mémoire de C. Neumann[1]), où l'illustre géomètre démontrait pour la première fois l'existence de ses séries de seconde espèce correspondant à $\nu = 0$.

2°. *Les séries de M. W. Kapteyn:* Dans le cas $\nu_s = p_s = \nu + s - 1$ et $\mu = \nu$ notre théorème général nous conduira des séries *kapteynniennes* de première espèce à celles de seconde espèce.

3°. *Les séries de Schlömilch* obtenues de (1) en y mettant $\mu = \nu = \nu_s$ et $p_s = s$ nous donnent des séries analogues selon des produits de deux fonctions cylindriques.

4°. *Les séries de Fourier-Dini* peuvent être appliquées comme dans le § 8.

Or, il faut remarquer que le théorème VII ne détermine pas toujours le champ de convergence complet de la série (2). En effet, il est bien connu que les deux séries *neumanniennes* qui représentent la même fonction, holomorphe aux environs de l'origine, ont le même champ de convergence.

Pour mettre en pleine lumière la question concernant les champs de convergence des deux séries *neumanniennes* qui représentent la même fonction désignons

[1]) Mathematische Annalen, t. 3, p. 581—610; 1871.

par K et K_1 les deux champs mentionnés dans notre théorème VII, puis supposons que le développement

$$x^\rho = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\nu_s}(p_s x) \tag{4}$$

soit convergent dans le domaine K; nous aurons immédiatement, en vertu de § 1, (7) et § 9, (2) cet autre développement:

$$\frac{\Gamma(\rho+1)\, x^\rho}{\Gamma\left(\frac{\rho+\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\sigma+1}{2}\right)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\frac{\nu_s+\sigma}{2}}(p_s x)\, J^{\frac{\nu_s-\sigma}{2}}(p_s x) \tag{5}$$

qui est certainement convergent dans le domaine K_1.

Supposons maintenant que la série (4) soit la série *neumannienne* de première espèce, les deux domaines K et K_1 coïncident tous deux avec la partie finie du plan des x, ce qui est la raison de la coïncidence des domaines de convergence K et K_1 pour les deux séries *neumanniennes* qui représentent la même fonction.

Pour donner aussi une application de l'intégrale double § 9, (4), remarquons qu'une formule générale que j'ai développée dans mon *Traité de fonctions cylindriques*[1]) donnera immédiatement ce développement:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s J^{\frac{\nu+\rho}{2}}(sx)\, J^{\frac{\nu-\rho}{2}}(sx)}{(sx)^\nu} = \\ &= \frac{4}{|x| \cdot \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' k_s^{2\nu} \cdot \int_0^1 \frac{\cos(\rho \arcsin k_s z)\,(1-z^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(1-k_s^2 z^2)^{\frac{\nu+1}{2}}}\, dz, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où x désigne une quantité réelle, telle que

$$\pi\left(p-\frac{1}{2}\right) \leq |x| < \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{7}$$

p étant un positif entier, tandis que nous avons posé pour abréger:

$$k_s = \sqrt{1 - \frac{(2s-1)^2\pi^2}{4x^2}};$$

quant à ε_s, il faut poser $\varepsilon_0 = 1$, mais $\varepsilon_s = 2$ pour $s \geq 1$.

L'accent fixé au signe Σ qui figure au second membre indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $s = p$, dans le cas particulier où l'égalité a lieu dans la limite inférieure de (7).

Dans le cas particulier où $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, la somme de la série infinie qui figure au premier membre de (6) est égale à zéro.

Posons particulièrement dans (6) $\nu = 0$, $\rho = 1$, nous retrouvons la formule élémentaire très connue:

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 340.

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} \sin(2sx)}{s} = x - \frac{x}{|x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p} {}' \pi, \tag{8}$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \rho = 0$ conduira à une autre formule particulière que j'ai développée dans mon *Traité*[1]) sus-indiqué. Nous aurons dans ce cas la formule

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s (J^0(sx))^2 = \frac{4}{\pi \cdot |x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p} {}' F\left(\frac{\pi}{2}, k_s\right), \tag{9}$$

où $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ désigne l'intégrale elliptique complète de première espèce, tandis que l'hypothèse $\nu = \rho = 1$ donnera la formule analogue

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{sx} \cdot J^0(sx) J^1(sx) = \frac{8}{\pi \cdot |x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p} {}' k_s^2 E\left(\frac{\pi}{2}, k_s\right), \tag{10}$$

où $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ désigne l'intégrale elliptique complète de seconde espèce.

Remarquons en passant qu'il est très facile de démontrer ces théorèmes concernant des cas particuliers de la série (6):

1°. *Supposons que ν et ρ soient des entiers non négatifs de la même parité, la somme de la série* (6) *s'exprime sous forme finie à l'aide des intégrales elliptiques complètes.*

2°. *Dans le cas, où ν et ρ sont des entiers non négatifs de parité différente, la somme de la série* (6) *est un polynome entier de π.*

3°. *Supposons que ν et ρ soient des nombres rationnels parmi lesquels un au moins est fractionnaire, la somme de la série* (6) *s'exprime sous forme finie à l'aide des intégrales hyperelliptiques.*

Remarquons en passant que l'intégrale § 8, (9) peut également être transformée à l'aide de la formule § 1, (10), mais qu'une telle transformation ne présente qu'un intérêt médiocre.

CHAPITRE III.

Sur une équation differentielle linéaire.

§ 11. Équation du quatrième ordre obtenue pour $C^\nu(x) \cdot C^\rho(x)$.

Il est évident que la méthode que j'ai appliquée dans mon Traité des fonctions cylindriques en m'appuyant sur un cas particulier de la formule intégrale § 9, (2) est également applicable à la formule générale. De plus, il est évident que cette méthode généralisée nous donnera sur-le-champ les équations differentielles que j'ai

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 347.

obtenues pour les produits de deux fonctions cylindriques en suivant une méthode un peu plus longue.

Pour obtenir l'équation différentielle à laquelle le produit de deux fonctions cylindriques quelconques doit satisfaire nous avons à prendre pour point de départ l'équation différentielle de Bessel

$$z^{(2)} + \frac{1}{x}\, z^{(1)} + \left(\alpha^2 - \frac{a^2}{x^2}\right) z = 0, \qquad z = J^a(\alpha x),$$

ce qui donnera en vertu de la formule intégrale § 9, (2) pour la fonction

$$y = J^{\frac{a+b}{2}}(x)\, J^{\frac{a-b}{2}}(x)$$

cette équation non homogène:

$$y^{(2)} + \frac{1}{x}\, y^{(1)} - \frac{a^2}{x^2}\, y = U, \tag{1}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$U = -\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^a(2x\cos\varphi)\,(2\cos\varphi)^2 \cos(b\varphi)\, d\varphi. \tag{1 bis}$$

Introduisons maintenant dans l'intégrale U la série ordinaire qui représente la fonction $J^a(x)$, nous aurons en vertu de § 1, (8):

$$U = -4 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{a+2s}{s} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{a+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{a+b}{2}\right)\, \Gamma\left(s+1+\frac{a-b}{2}\right)} \cdot \frac{(a+2s+1)\,(a+2s+2)}{(a+2s+2)^2 - b^2};$$

appliquons ensuite l'identité évidente

$$\frac{m\,(m-1)}{m^2 - x^2} = 1 + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{1}{m-x} - \frac{x+1}{2} \cdot \frac{1}{m+x},$$

puis mettons pour abréger:

$$U^{a,\,b}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{a+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{a+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{a+b}{2}\right)\, \Gamma\left(s+1+\frac{a-b}{2}\right)} \cdot \frac{1}{a+b+2s+2}, \tag{2}$$

nous aurons, en vertu de (1):

$$y^{(2)} + \frac{1}{x}\, y^{(1)} + \left(4 - \frac{a^2}{x^2}\right) y = (2b+2)\, U^{a,\,b}(x) - (2b-2)\, U^{a,\,-b}(x). \tag{3}$$

Cela posé, remarquons que la définition (2) donnera immédiatement ces deux identités:

$$D_x\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2}\cdot U^{a,\,b}(x)\right]=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2}\cdot J^{\frac{a+b}{2}}(x)\,J^{\frac{a-b}{2}}(x) \tag{4}$$

$$D_x\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2}\cdot U^{a,\,-b}(x)\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2}\cdot\left(J^{\frac{a+b}{2}}(x)\,J^{\frac{a-b}{2}}(x)+2b\,U^{a,\,-b}(x)\right), \tag{5}$$

puis multiplions par $\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2}$ les deux membres de (3), une différentiation par rapport à x donnera cette autre équation différentielle:

$$\left.\begin{aligned} y^{(3)}+\frac{3+b}{x}\cdot y^{(2)}+\left(4+\frac{1+b-a^2}{x^2}\right)y^{(1)}+\left(\frac{4+4b}{x}-\frac{a^2b}{x^3}\right)y = \\ =-\frac{4}{x}\cdot b\,(b-1)\,U^{a,\,-b}(x). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Multiplions ensuite par $\left(\frac{x}{2}\right)^{3-b}$ les deux membres de (6); une nouvelle différentiation par rapport à x donnera finalement, si nous posons encore

$$\frac{a+b}{2}=\nu, \qquad \frac{a-b}{2}=\rho,$$

l'équation différentielle cherchée:

$$\left.\begin{aligned} y^{(4)}+\frac{6}{x}\,y^{(3)}+\left(4+\frac{7-2\nu^2-2\rho^2}{x^2}\right)y^{(2)}+\left(\frac{16}{x}+\frac{1-2\nu^2-2\rho^2}{x^3}\right)y^{(1)}+ \\ +\left(\frac{8}{x^2}+\frac{(\nu^2-\rho^2)^2}{x^4}\right)y=0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

qui admet certainement comme intégrale particulière la fonction $y=J^{\nu}(x)\,J^{\rho}(x)$.

Remarquons maintenant que les signes des deux paramètres ν et ρ peuvent être choisis arbitrairement; il est évident que l'équation différentielle (7) a comme intégrale complète la fonction

$$y=c_1\,J^{\nu}(x)\,J^{\rho}(x)+c_2\,J^{\nu}(x)\,Y^{\rho}(x)+c_3\,Y^{\nu}(x)\,J^{\rho}(x)+c_4\,Y^{\nu}(x)\,Y^{\rho}(x), \tag{8}$$

où les c_s désignent des constantes arbitraires, fonctions de ν et ρ.

§ 12. Équations différentielles du troisième ordre.

Revenons maintenant à l'équation différentielle § 11, (6); il est clair que les deux cas particuliers $b=0$, $b=1$ présentent un intérêt particulier, par ce que ces deux valeurs de b font disparaître le second membre de l'équation susdite.

1°. $b=0$; posons $a=2\nu$, il en résulte cette équation:

$$y^{(3)}+\frac{3}{x}\,y^{(2)}+\left(4+\frac{1-4\nu^2}{x^2}\right)y^{(1)}+\frac{4}{x}\,y=0 \tag{1}$$

qui admet comme intégrale complète la fonction

$$y=c_1\left(J^{\nu}(x)\right)^2+c_2\,J^{\nu}(x)\,Y^{\nu}(x)+c_4\left(Y^{\nu}(x)\right)^2. \tag{2}$$

En effet, introduisons dans (1) la série

$$y = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot x^{k+2s}, \tag{3}$$

puis appliquons la formule *eulérienne* concernant la fonction $\Gamma(2\omega)$; nous aurons, en vertu de § 9, (1), ces trois intégrales particulières:

$$\left(J^{\nu}(x)\right)^2, \quad \left(J^{-\nu}(x)\right)^2, \quad J^{\nu}(x)\, J^{-\nu}(x),$$

ce qui nous conduira immédiatement à l'intégrale complète (2).

2°. $b = 1$; nous aurons ici l'équation différentielle analogue à (1):

$$y^{(3)} + \frac{4}{x}\, y^{(2)} + \left(4 + \frac{2 - a^2}{x^2}\right) y^{(1)} + \left(\frac{8}{x} - \frac{a^2}{x^3}\right) y = 0, \tag{4}$$

équation qui admet certainement comme intégrale particulière la fonction

$$y_1 = J^{\frac{a+1}{2}}(x)\, J^{\frac{a-1}{2}}(x). \tag{5}$$

Pour déterminer maintenant deux autres intégrales particulières de (4), introduisons-y la série (3); nous aurons la formule récursive

$$(k + 2s + 1)(k + 2s + a)(k + 2s - a)\, a_s + 4(k + 2s)\, a_{s-1} = 0,$$

et pour k les valeurs suivantes:

$$k = a, \quad k = -a, \quad k = -1.$$

L'hypothèse $k = a$ nous conduira à l'intégrale (5), tandis que $k = -a$ donnera cette autre intégrale particulière:

$$y_2 = J^{\frac{1-a}{2}}(x)\, J^{-\frac{a+1}{2}}(x). \tag{6}$$

L'intégrale qui correspond à $k = -1$ se détermine sous la forme suivante:

$$y_3 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1}}{\Gamma\left(s + \frac{1-a}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{1+a}{2}\right)},$$

ce qui nous conduira à considérer ce cas particulier de § 9, (1):

$$J^{\frac{a-1}{2}}(x)\, J^{-\frac{a+1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{2s-1}{s}}{\Gamma\left(s + \frac{1-a}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{1+a}{2}\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1};$$

appliquons ensuite l'identité évidente

$$\binom{2s-1}{s} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2s}{s}, \quad s \geqq 1,$$

nous aurons en vertu de la formule *eulérienne* § 1, (5) pour y_3 cette autre expression:

$$y_3 = J^{\frac{a-1}{2}}(x)\, J^{-\frac{a+1}{2}}(x) - \frac{\cos\frac{a\pi}{2}}{\pi x}. \tag{7}$$

Combinons maintenant les deux intégrales y_1 et y_3; la définition de la fonction cylindrique de seconde espèce $Y^\nu(x)$ donnera cette autre intégrale particulière de (4):

$$y_4 = J^{\frac{a-1}{2}}(x)\, Y^{\frac{a+1}{2}}(x) + \frac{1}{\pi x}. \tag{8}$$

Quant à l'intégrale (6), appliquons l'identité

$$J^{-\nu}(x) = \cos\nu\pi\, J^\nu(x) - \sin\nu\pi\, Y^\nu(x),$$

et la formule fondamentale de LOMMEL:

$$Y^{\nu-1}(x)\, J^\nu(x) - Y^\nu(x)\, J^{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x};$$

nous aurons cette autre intégrale particulière de (4):

$$y_5 = Y^{\frac{a-1}{2}}(x)\, Y^{\frac{a+1}{2}}(x), \tag{9}$$

de sorte que nous avons démontré ce théorème qui est certainement nouveau:

VIII. *Supposons différent de zéro le paramètre a, l'intégrale complète de l'équation* (4) *se présente sous la forme*

$$y = c_1\, J^{\frac{a-1}{2}}(x)\, J^{\frac{a+1}{2}}(x) + c_2\, Y^{\frac{a-1}{2}}(x)\, Y^{\frac{a+1}{2}}(x) + c_3 \left(J^{\frac{a-1}{2}}(x)\, Y^{\frac{a+1}{2}}(x) + \frac{1}{\pi x}\right). \tag{10}$$

Dans le cas particulier $a = 0$ nous aurons:

$$J^{\frac{1}{2}}(x)\, J^{-\frac{1}{2}}(x) = -\, Y^{\frac{1}{2}}(x)\, Y^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sin 2x}{\pi x};$$

pour obtenir dans ce cas une troisième intégrale particulière de (4) nous pouvons prendre la fonction

$$\frac{J^{\frac{a+1}{2}}(x)\, J^{\frac{a-1}{2}}(x) - J^{\frac{1-a}{2}}(x)\, J^{-\frac{1+a}{2}}(x)}{\sin a\pi},$$

ce qui donnera, pour $a = 0$, l'intégrale cherchée sous la forme

$$y_6 = \sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \left(\cos x \cdot \left(D_\nu J^\nu(x)\right)_{\nu = \frac{1}{2}} + \sin x \cdot \left(D_\nu J^\nu(x)\right)_{\nu = -\frac{1}{2}}\right). \tag{11}$$

§ 13. Représentations intégrales de $C^{\nu}(x) \cdot C^{\nu+1}(x)$.

Dans mon *Traité des fonctions cylindriques* j'ai étudié d'un point de vue général une classe d'intégrales définies parmi lesquelles la suivante:

$$x^{-\omega}\mathfrak{S}(xy) = \int_0^{\infty} C^{\nu}(tx)\,t^{\rho}(t^2+y^2)^{\sigma}dt, \qquad \omega = \rho + 2\sigma + 1 \tag{1}$$

est une des plus simples; la fonction $\mathfrak{S}(x)$ qui figure au premier membre de (1) satisfait à cette équation différentielle du troisième ordre:

$$\mathfrak{S}^{(3)}(x) + \frac{3-2\omega}{x}\cdot\mathfrak{S}^{(2)}(x) + \left(\frac{(\omega-1)^2-\nu^2}{x^2} - 1\right)\mathfrak{S}^{(1)}(x) + \frac{2\sigma}{x}\cdot\mathfrak{S}(x) = 0. \tag{2}$$

Posons ensuite dans l'équation différentielle § 12, (4):

$$y = x^{-\alpha}\cdot z$$

et dans l'équation ainsi obtenue px au lieu de x, nous aurons l'équation différentielle

$$\left.\begin{aligned} &z^{(3)} + \frac{4-3\alpha}{x}\cdot z^{(2)} + \left(4p^2 + \frac{(\alpha-1)(3\alpha-2)-a^2}{x^3}\right)z^{(1)} + \\ &\quad + \left(\frac{4p^2(2-\alpha)}{x} - \frac{(\alpha-1)(\alpha-a)(\alpha+a)}{x^3}\right)z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

qui admet comme intégrale complète la fonction

$$\left.\begin{aligned} z = x^{\alpha}\Bigg(&c_1 J^{\frac{a+1}{2}}(px)\,J^{\frac{a-1}{2}}(px) + c_2 Y^{\frac{a+1}{2}}(px)\,Y^{\frac{a-1}{2}}(px) + \\ &+ c_3\left(J^{\frac{a-1}{2}}(px)\,Y^{\frac{a+1}{2}}(px) + \frac{1}{\pi p x}\right)\Bigg). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Cela posé, il est évident que les équations différentielles (2) et (3) deviennent identiques sous les conditions suivantes:

$$p = \frac{i}{2}, \quad 4-3\alpha = 3-2\omega, \quad \alpha-2 = 2\sigma$$
$$(\alpha-1)(3\alpha-2)-a^2 = (\omega-1)^2-\nu^2$$
$$(\alpha-1)(\alpha-a)(\alpha+a) = 0,$$

de sorte que nous avons à étudier séparément ces trois cas différents:

1°. $\alpha = \rho = \omega = 1, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, \quad a = \nu, \quad p = \frac{i}{2}$

2°. $\alpha = a, \quad \rho = \frac{a-1}{2}, \quad \sigma = \frac{a}{2} - 1, \quad \omega = \frac{3a-1}{2}, \quad \nu = \frac{a+1}{2}, \quad p = \frac{i}{2}$

3°. $\alpha = -a, \quad \rho = -\frac{a+1}{2}, \quad \sigma = -\frac{a}{2} - 1, \quad \omega = -\frac{3a+1}{2}, \quad \nu = \frac{1-a}{2}, \quad p = \frac{i}{2}.$

Or, il saute aux yeux que les deux derniers cas coïncident, de sorte que nous n'avons qu'à étudier les deux premiers cas.

§ 14. Étude de l'intégrale $\int_0^\infty C^\nu(tx)\,t\,(t^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$.

Dans le premier cas indiqué au § 13 nous aurons une formule de la forme

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\,t\,dt}{\sqrt{t^2+y^2}} = y\cdot\Bigg[c_1 J^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) J^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) + c_2 J^{-\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) J^{\frac{1-\nu}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) + \\ + c_3\left(J^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) J^{-\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) - \frac{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}{i\pi xy}\right)\Bigg],\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où les coefficients c_s sont des fonctions de ν, indépendantes à la fois de x et de y.

Pour déterminer ces trois coefficients inconnus, remarquons tout d'abord que l'intégrale qui figure au premier membre de (1) a un sens sous les conditions suivantes: x réel et non négatif, $\Re(\nu) > -2$, et qu'elle représente dans ce cas une fonction *analytique* de ν.

Multiplions ensuite par $x^{-\nu}$ les deux membres de (1), puis faisons converger à zéro la variable positive x; l'intégrale ainsi obtenue aura un sens pourvu que $-2 < \Re(\nu) < -1$, ce qui donnera pour $y = 1$:

$$\frac{\left(\frac{i}{4}\right)^\nu \cdot c_1}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\cdot\int_0^\infty \frac{t^{\nu+1}}{\sqrt{t^2+1}}\,dt,$$

d'où en appliquant des formules très connues concernant la fonction gamma:

$$c_1 = -\frac{\pi i^{-\nu}}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}.$$

Pour déterminer le coefficient c_3 mettons dans (1) $y = 0$; l'intégrale ainsi obtenue a un sens, pourvu que $\Re(\nu) > -1$; nous aurons, en vertu de l'intégrale fondamentale de M. Weber § 7, (9):

$$c_3 = \frac{\pi i}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}.$$

Quant au coefficient c_2, il est facile de voir qu'il doit disparaître; en effet, supposons $\Re(\nu) > 0$, puis mettons dans (1) $x = 0$, le premier membre de cette formule s'évanouira, ce qui n'est possible pour le second membre que si $c_2 = 0$.

Cela posé, nous aurons finalement la formule:

$$\int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\,t}{\sqrt{t^2+y^2}}\,dt = -\frac{\pi y}{2}\cdot J^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) H_2^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{xyi}{2}\right) - \frac{1}{x} \tag{2}$$

qui est certainement nouvelle; dans (2) $H_2^a(x)$ désigne la fonction de Hankel, savoir

$$H_2^a(x) = J^a(x) - iY^a(x). \tag{3}$$

Changeons ensuite dans (2) le signe de ν, nous pouvons déterminer sans peine la valeur de l'intégrale correspondante qui contient une fonction cylindrique quelconque. Nous ne nous arrêterons pas à une recherche plus approfondie d'une telle généralisation de (2); au contraire nous préférons soumettre notre formule (2) à une légère transformation.

A cet effet, mettons dans (2) $-iy$ au lieu de y, puis supposons pour un instant réels la nouvelle variable y et le paramètre ν; il résulte, en égalant les parties réelles et imaginaires de la formule ainsi obtenues, ces deux autres formules:

$$\int_y^\infty \frac{J^\nu(tx)\,t}{\sqrt{t^2-y^2}}\,dt = \frac{\pi y}{2}\cdot J^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{xy}{2}\right) Y^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{1}{x} \tag{4}$$

$$\int_0^y \frac{J^\nu(tx)\,t}{\sqrt{y^2-t^2}}\,dt = \frac{\pi y}{2}\cdot J^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{xy}{2}\right) J^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{xy}{2}\right), \tag{5}$$

dont la première est certainement nouvelle, tandis que la seconde coïncide avec un cas particulier de notre formule générale § 9, (2).

§ 15. Étude de l'intégrale $\int_0^\infty J^{\nu+1}(tx)\,t^{\nu+1}\cdot(t^2+y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$.

Dans le second cas du § 13 nous obtenons tout d'abord une formule de la forme

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J^{\nu+1}(tx)\,t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}\,dt &= \frac{y^{2\nu+1}}{x^\nu}\cdot\left[c_1 J^\nu\left(\frac{xyi}{2}\right)J^{\nu+1}\left(\frac{xyi}{2}\right) + \right.\\ \left. + c_2 J^{-\nu}\left(\frac{xyi}{2}\right)J^{-\nu+1}\left(\frac{xyi}{2}\right) + c_3\left(J^\nu\left(\frac{xyi}{2}\right)J^{-\nu-1}\left(\frac{xyi}{2}\right) + \frac{2\sin\nu\pi}{i\pi xy}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

d'où, en suivant la méthode ordinaire, cette détermination des coefficients c_s:

$$c_3 = 0$$

$$c_1 = \frac{2^{\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i^{-2\nu-1}}{\sin\nu\pi}$$

$$c_2 = -\frac{2^{\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i^{2\nu+1}}{\sin\nu\pi},$$

ce qui donnera la formule cherchée

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J^{\nu+1}(tx)\,t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}\,dt &= -\frac{2^{\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(iy)^{2\nu+1}}{x^\nu\sin\nu\pi}\cdot\\ \cdot\left(J^\nu\left(\frac{xyi}{2}\right)J^{\nu+1}\left(\frac{xyi}{2}\right)e^{-2\nu\pi i} + J^{-\nu}\left(\frac{xyi}{2}\right)J^{-\nu-1}\left(\frac{xyi}{2}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

qui est valable, pourvu que x soit positif et $\frac{1}{6} > \Re(\nu) > -\frac{3}{2}$; quant à y, cette variable ne doit être purement imaginaire que si nous supposons encore $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$.

Cela posé, mettons dans (2) $2x$ au lieu de x et $-iy$ au lieu de y, nous aurons une identité de la forme:

$$\int_y^\infty \frac{J^{\nu+1}(2tx)t^{\nu+1}}{(t^2-y^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}\,dt + (-1)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot \int_0^y \frac{J^{\nu+1}(2tx)t^{\nu+1}}{(y^2-t^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}\,dt =$$

$$= -\frac{2^{\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)y^{2\nu+1}}{x^\nu \sin\nu\pi}\Big(J^\nu(xy)J^{\nu+1}(xy)\cos\nu\pi -$$

$$- iJ^\nu(xy)J^{\nu+1}(xy)\sin\nu\pi + J^{-\nu}(xy)J^{-\nu-1}(xy)\Big),$$

ce qui nous permet de déterminer la valeur du facteur $(-1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ qui figure au premier membre; nous aurons par là, après une légère modification des significations:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\nu+1}(2x\cos\varphi)(\cos\varphi)^{\nu+1}(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi = \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{x^\nu}\cdot J^\nu(x)J^{\nu+1}(x), \qquad (3)$$

où il faut admettre $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$; la formule (3), qui est certainement nouvelle, peut aussi se démontrer sans peine par un calcul direct.

De plus, nous aurons cette autre formule:

$$\left.\begin{aligned} &\int_y^\infty \frac{J^{\nu+1}(2tx)t^{\nu+1}}{(t^2-y^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}\,dt = -\frac{2^{\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)y^{2\nu+1}}{x^\nu\sin\nu\pi}\cdot \\ &\cdot\Big(J^\nu(xy)J^{\nu+1}(xy)\cos\nu\pi + J^{-\nu}(xy)J^{-\nu-1}(xy)\Big), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

où il faut admettre $\frac{1}{6} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$; posons dans (4) $\nu = 0$, nous aurons, après un simple calcul, un cas particulier de la formule § 14, (4).

Table des Matières.

CHAPITRE I.

Applications aux fonctions sphériques.

CHAPITRE II.

Applications aux fonctions cylindriques.

CHAPITRE III.

Sur une équation différentielle linéaire.